



UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-SOPHIA ANTIPOLIS

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

2004 route des Lucioles
B.P. 93
06902 Sophia-Antipolis
France

Rapports de Recherche

N°1921

Programme 4

Robotique, Image et Vision

MANIPULATEURS PARALLÈLES, 6EME PARTIE : DÉTERMINATION DES ESPACES DE TRAVAIL EN ORIENTATION.

Jean-Pierre MERLET

Mai 1993

Résumé

Une phase importante de la conception d'un robot parallèle est la détermination de son espace de travail. Pour un manipulateur parallèle à 6 degrés de liberté celui-ci est borné en raison des limitations sur les variables articulaires (longueur des segments) mais aussi par les limitations sur le débattement des articulations ainsi que par les collisions entre segments. Le calcul de l'espace de travail d'un robot parallèle est délicat car, contrairement au robot série, il n'est pas possible de découpler orientation et translation de l'organe terminal ce qui impose une représentation de l'espace de travail en dimension 6. Usuellement on simplifie le problème en supposant que l'orientation de l'organe terminal est constante et en cherchant des coupes planes de l'espace de travail. Mais très peu de travaux dans la littérature décrivent de méthode permettant de déterminer les possibilités en orientation des robots parallèles.

Nous présentons dans ce rapport une méthode permettant de décrire les limites de l'espace de travail en orientation lorsqu'un point de l'organe terminal est fixe. Cette méthode prend en compte les limitations sur les variables articulaires, les débattements des articulations ainsi que les problèmes d'intersection entre segments. Nous proposons ensuite une méthode pour calculer l'espace dextre c'est-à-dire l'ensemble des positions du point de référence de l'organe terminal pour lesquels toutes les orientations sont permises.

Ces algorithmes sont illustrés sur différents exemples.

Abstract

The workspace of a 6 d.o.f. parallel manipulator is bounded because of the limitations on the articular coordinates (links lengths) but also because of the mechanical limits on the joints and links interference. Many researchers have addressed the problem of determining the border of the workspace for a fixed orientation of the end-effector but few have addressed the problem of determining the orientation workspace.

We propose in this report a geometrical method enabling to describe the orientation workspace of parallel manipulators when one point of the mobile platform is fixed in the reference frame. This method takes into account the limitations on the articular coordinates, the mechanical limits on the articulations and checks for links interference. We show then how to determine the dextrous workspace i.e. the possible location of the end-effector for which any orientation is possible.

These methods are illustrated on various examples.

Chapitre 1

Introduction

1.1 La structure mécanique d'un robot parallèle

Considérons un robot parallèle à 6 degrés de liberté tel que celui représenté sur la figure 1.1. Il est constitué d'une base supposée fixe et d'un plateau mobile, reliés par 6 segments. Une

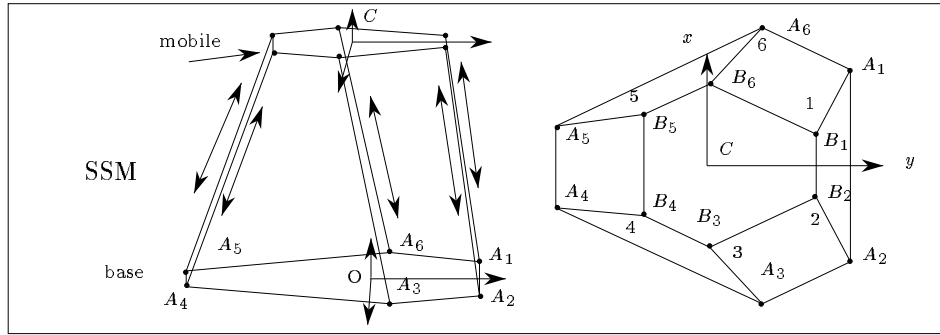


Figure 1.1 : Un robot parallèle à 6 degrés de liberté.

extrémité de ces segments est reliée à la base par un joint de Cardan, l'autre extrémité étant reliée au plateau mobile par un rotule. Dans chacun des segments un actionneur linéaire permet de modifier la longueur du segment. Par un contrôle approprié de ces longueurs il est alors possible de placer le plateau mobile dans une position et une orientation données: on contrôle donc les 6 degrés de liberté du plateau mobile. On obtient ainsi un manipulateur dont l'architecture mécanique est très différente de celle des robots série.

Cette architecture est connue depuis longtemps et certains problèmes théoriques qu'elle pose ont été étudiés dès les années 1800 [4]. Leur réalisation pratique est cependant plus récente puisque le premier prototype semble pouvoir être attribué à Gough [25] en 1949.

Cette architecture a connue un regain d'intérêt dans les années 60 pour la réalisation de plate-forme pour les simulateurs de vol [3, 25]. En effet une des caractéristiques intéressantes

de ce mécanisme est sa capacité de manipulation de charges lourdes. En effet le poids de la charge est sensiblement réparti sur les segments et exerce principalement sur ceux-ci une contrainte de traction-compression. Ceci est à opposer au cas des robots série où les premiers actionneurs sont au contraire soumis à des couples importants et où les segments sont soumis principalement à des contraintes de flexion beaucoup plus nuisibles.

L'utilisation de cette structure en tant que robot est encore plus récente puisqu'elle remonte à 1979 [15], avec son apparition dans une cellule d'assemblage. Ici l'intérêt supplémentaire qui apparaît est la précision de positionnement. En effet les erreurs de mesure des capteurs permettant d'estimer les longueurs des segments n'entraînent pas, à l'opposé de ce qui se passe pour les robots série, une erreur importante sur la localisation de l'organe terminal.

De plus cette architecture est intrinsèquement très rigide (un projet de robot minier utilisant cette propriété est d'ailleurs en développement [2]) mais peut être adaptée pour avoir une certaine "souplesse" mécanique sans perte d'information sur la position de l'organe terminal. En plaçant des capteurs de force dans les segments on peut même mesurer les forces et moments s'exerçant sur le plateau mobile, c'est-à-dire disposer d'un manipulateur qui est en même temps un capteur de forces à 6 composantes. Ces caractéristiques en font donc un instrument qui a été souvent utilisé dans des cellules d'assemblage [2, 6, 21, 23, 19]. L'étude des robots parallèles est d'ailleurs en plein développement [7, 9, 10, 11, 17, 24, 29] et certains problèmes théoriques ont connu une avancée importante ces dernières années (en particulier les problèmes de modèle géométrique, de dynamique et de configurations singulières). Toute ces études devraient permettre à terme la construction d'un système de conception de robots parallèles.

Cependant une caractéristique pourtant importante n'a reçu, d'un point de vue théorique, qu'une attention relativement faible jusqu'à maintenant: la détermination de l'espace de travail.

1.2 Complexité de représentation de l'espace de travail

Le calcul de l'espace de travail est évidemment très important dans une phase de conception. Le fait que les travaux dans ce domaine sont peu nombreux se justifie cependant par la complexité du problème. En effet, si l'on considère un robot série classique la représentation de l'espace de travail est généralement basée sur l'illustration en dimension 3 de l'espace atteignable par le centre de son poignet (caractérisant les translations) et par celui atteignable par l'extrémité de l'organe terminal (ce qui caractérise les orientations), ces deux zones étant découplées. Ce n'est malheureusement pas le cas pour les robots parallèles: la zone atteignable par le centre du plateau mobile est dépendante de l'orientation de ce plateau. La dimension de l'espace dans lequel on doit faire la représentation est donc 6 ce qui est peu favorable à une représentation graphique.

Heureusement la majeure partie des applications de ce type de robot permet de simplifier ce problème : en effet le robot est le plus souvent utilisé soit avec une orientation constante, soit en maintenant fixe un des points du plateau mobile. On ne s'intéresse donc qu'à une restriction de l'espace total dans un espace de dimension 3. Dans ce rapport nous nous intéresserons aux possibilités de rotation du plateau mobile qui sont limitées en raison de différentes contraintes.

Les contraintes qui limitent l'évolution d'un robot parallèle sont de trois types:

- les limitations sur les coordonnées articulaires : les segments ont une longueur minimum et une longueur maximum.

- les butées mécaniques sur les articulations passives : joint de Cardan et rotule.
- les collisions entre segments.

D'un point de vue analytique les équations décrivant ces contraintes sont complexes, de type inégalités, et la détermination des bornes par manipulation de ces équations semi-algébriques semble difficile, même avec nos hypothèses simplificatrices.

1.3 Notation

Avant d'exposer une méthode pour le calcul de l'espace de travail nous allons introduire quelques notations. On définit tout d'abord deux repères, l'un fixe et lié à la base, appelé *référentiel absolu* et l'autre attaché au plateau mobile et appelé *référentiel mobile*.

Les notations suivantes seront employées dans ce rapport:

- \wedge : symbole du produit vectoriel.
- A_i : centre de l'articulation du segment i liée à la base.
- $x_{a_i}, y_{a_i}, z_{a_i}$: coordonnées de A_i dans le référentiel absolu.
- B_i : centre de l'articulation du segment i liée à l'organe terminal.
- $x_{b_i}, y_{b_i}, z_{b_i}$: coordonnées de B_i dans le référentiel mobile.
- $x_{B_i}, y_{B_i}, z_{B_i}$: coordonnées de B_i dans le référentiel absolu.
- O : centre du référentiel absolu. En général ce point sera le barycentre des points d'articulations proches de la base.
- x, y, z : axes du référentiel absolu lié à la base. L'axe y sera l'axe de symétrie de la base si elle en possède un.
- C : centre du référentiel mobile, sert en général à repérer la position de l'organe terminal. En général on choisira le barycentre des points d'articulation liés au mobile.
- x_c, y_c, z_c : coordonnées de C dans le repère absolu.
- x_r, y_r, z_r : axes du référentiel lié au plateau mobile. L'axe y_r sera l'axe de symétrie du mobile s'il en possède un.
- ψ, θ, ϕ : angles d'Euler permettant de décrire l'orientation de l'organe terminal. Ces angles sont définis de la manière suivante : partant du repère de référence on tourne d'un angle ψ autour de l'axe z , puis d'un angle θ autour du nouvel axe x et enfin d'un angle ϕ autour du nouvel axe z pour obtenir le repère mobile.
- R : matrice de rotation permettant le passage du référentiel mobile au référentiel absolu.
- ρ_i : longueur du segment relié à l'organe terminal de la chaîne i .

Pour alléger la présentation on omettra de faire figurer les indices lorsque le contexte ne sera pas ambigu.

1.4 Etat de l'art

La plupart des travaux sur le calcul de l'espace de travail ont porté sur le cas où l'orientation de l'organe terminal est fixe. Dans ce cas on s'intéresse aux possibilités de translation de l'organe terminal. Pour ce problème la méthode la plus utilisée pour déterminer la frontière de l'espace atteignable consiste à procéder par *discrétisation* [5],[6].

C'est cette méthode que nous avons décrite dans un précédent rapport [16]: nous nous étions intéressé au déplacement en translation dans le plan $x-y$ du centre de notre prototype en utilisant un système de coordonnées polaire pour ces variables. Le rayon polaire était progressivement augmenté et à chaque pas les longueurs des segments étaient calculées jusqu'à ce que l'on trouve l'ensemble des positions limites où au moins l'une des longueurs se trouve en dehors des bornes permises.

Cette méthode a aussi été employée par la suite en incorporant de plus une vérification des débâtements des articulations [14] ou bien avec vérification de l'ensemble des contraintes [2]. Cette approche numérique est cependant lourde en temps de calcul et nécessite une implantation soigneuse car les coupes peuvent comporter des "trous" qui peuvent échapper à la détection et même conduire à des erreurs, la frontière de ces trous étant confondue avec l'enveloppe extérieure. Si cette méthode est effectivement utilisable sur des manipulateurs de petite dimension elle ne paraît pas satisfaisante pour des mécanismes comme les simulateurs de vol. De plus une représentation graphique obtenue à partir de cette méthode est peu satisfaisante car elle ne fournit aucune information sur la géométrie de la frontière de l'espace de travail. Pour la même raison le stockage des résultats nécessite une place mémoire importante et le calcul de certaines caractéristiques de l'espace de travail (volume, facteur de forme) est délicat avec ce type de données.

Une approche analytique a été proposée par différents auteurs. Elle utilise la constatation que pour un point sur la frontière de l'espace de travail les vecteurs unitaires indiquant la direction des vitesses permises ne décrivent pas une sphère complète. Une telle approche permet dans certains cas de trouver la frontière de l'espace de travail [13] [1],[12].

Une approche complètement différente a été proposée par C.Gosselin [8] lors de son séjour à l'INRIA. Dans cette approche on ne prend en compte que les limitations sur les longueurs des segments et l'on montre qu'un algorithme géométrique simple permet de déterminer la frontière de l'espace de travail qui est constituée d'arcs de cercle. Nous avons étendu cet algorithme pour prendre en compte les butées mécaniques sur les articulations et les risques d'intersection entre segment [18]. Cet algorithme permet de calculer très rapidement la frontière de l'espace de travail et toutes les caractéristiques qui y sont associées. Cet algorithme a par exemple été utilisé pour calculer le dimensionnement de manipulateurs où, entre autres contraintes, le volume de l'espace de travail en translation devait inclure des volumes fixés comme une sphère ou un cube de dimensions connues.

Pour ce qui concerne l'espace de travail en orientation nous avons proposé une méthode basée sur une technique de discrétisation pour calculer les variations angulaires possibles [17]. Mais cette méthode et cette manière de représenter les résultats n'étaient que partiellement satisfaisante.

Il existe très peu de travaux dans la littérature sur le calcul des possibilités en rotation des robots parallèles. Pennock [20] s'est intéressé à ce problème pour les robots parallèles plans en cherchant à déterminer la frontière de l'espace de travail maximal, c'est-à-dire l'ensemble des positions de l'organe terminal atteignable avec au moins une orientation, mais nous montrerons dans un prochain article que son algorithme fournit des résultats incorrects. En tout état de cause le principe de son algorithme ne pourrait pas être étendu aux cas des manipulateurs à six

degrés de liberté. Il en serait de même pour l'approche géométrique proposée par Williams [28].

Weng [26],[27] a proposé pour une architecture particulière une approche différentielle qui permet, à partir d'un cas limite, d'obtenir l'espace dextre (c'est-à-dire l'ensemble des positions de l'organe terminal où toutes les orientations sont possibles) ainsi que l'espace des orientations lorsqu'un des points de l'organe terminal a une position fixée. Mais les seules contraintes qui sont prises en compte sont les longueurs limites des segments et l'introduction des autres contraintes semble difficile dans cette méthode. Il apparaît pourtant clairement que les intersections entre segment sont un facteur limitatif fort par exemple dans le cas des rotations autour d'un axe vertical.

Pooran [22] propose une méthode pour déterminer l'espace de travail maximal pour les robots à 6 degrés de liberté . Mais son algorithme utilise une méthode de discrétisation.

Dans ce rapport nous allons nous intéresser à la détermination de l'espace de travail en orientation lorsqu'un point de l'organe terminal est fixe ainsi qu'à la détermination de l'espace dextre.

Chapitre 2

Espace de travail en orientation

2.1 Introduction

Dans cette partie nous supposons que le point C origine du repère liée à la plate-forme mobile est fixe dans le repère de référence. Notons que par un simple changement de l'origine du repère relatif (ce qui nous impose simplement d'exprimer les coordonnées des points d'articulation de la plate-forme dans ce repère) on peut fixer la position de n'importe quel point de l'organe terminal. On s'intéresse alors aux rotations de l'organe terminal autour du point fixe.

La représentation de l'orientation d'un corps est chose difficile. Celle utilisant des valeurs d'angle est peu parlante et nous avons donc choisi un autre mode de représentation.

Nous considérons un segment de longueur unité lié au plateau mobile dont une extrémité est le centre de la rotation du plateau mobile. Lorsque le plateau mobile tourne autour du centre de rotation l'extrémité du segment se déplace sur la sphère de centre le centre de rotation, de rayon unité, que nous appellerons la *sphère unité*. Ces déplacements caractérisent les rotations de la plate-forme hormis celles correspondant à la rotation autour du segment lui même pour lesquelles il n'y a pas de déplacement du segment. En représentant les régions de la sphère unité dans lesquelles peut se trouver l'extrémité du segment on caractérise deux degrés de liberté en rotation du manipulateur. En choisissant convenablement la direction du segment on peut obtenir l'ensemble des rotations permises pour l'organe terminal.

Soit \mathbf{N} un segment de longueur 1, lié au plateau mobile, dont une extrémité est placée en C et soit N_e l'autre extrémité de \mathbf{N} . Lorsque le plateau mobile tourne autour de C l'extrémité N_e se déplace sur la sphère unité pour toute rotation autour d'un axe différent de \mathbf{N} . Nous représenterons les rotations possibles de la plate-forme en tracant sur la sphère unité les zones permises pour N_e .

Nous supposons d'abord que le plateau mobile tourne d'un angle θ_1 autour d'un vecteur \mathbf{X}_1 fixé dans le repère de référence. Une fois le plateau dans cette position on s'intéresse au rotation possible autour d'un vecteur \mathbf{X}_2 exprimé dans le repère de référence. Si le manipulateur n'est soumis à aucune contrainte l'extrémité N_e décrit sur la sphère unité, pour une valeur fixée de θ_1 , un cercle C_e (figure 2.1). En fait les contraintes sur le manipulateur vont faire que seule une partie de ce cercle pourra être occupée par N_e . Le but de notre algorithme est justement de calculer quelles sont les portions permises du cercle. En faisant varier de manière discrète

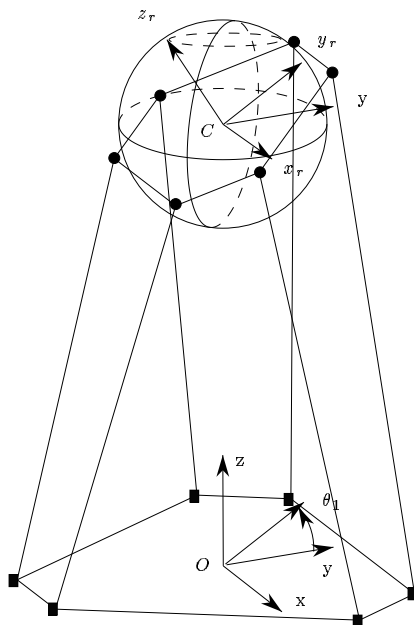


Figure 2.1 : Un exemple de calcul d'orientation. Le plateau mobile tourne d'abord autour de l'axe x d'un angle θ_1 . Dans cette position lorsque le plateau tourne autour de l'axe z N_e (ici l'extrémité du vecteur z_r) décrit sur la sphère unité un cercle (l'ellipse en trait pointillé). Ici nous avons $\mathbf{X}_1 = [1, 0, 0]$, $\mathbf{X}_2 = [0, 0, 1]$.

l'angle θ_1 on balayera la sphère unité et l'on obtiendra les régions possibles pour N_e sur la sphère unité.

Pour déterminer les portions permises des cercles C_e nous allons d'abord nous intéresser aux déplacements possibles des points B_i , centre des articulations du plateau mobile, en prenant en compte les contraintes uniquement sur le segment i .

2.2 Positions possibles pour les points B_i

Dans cette section nous supposons que les seules contraintes sont les bornes sur les longueurs ρ des segments. Pour être admissibles ces longueurs doivent être comprises dans l'intervalle $[\rho_{min}, \rho_{max}]$. Remarquons tout d'abord que lors de la rotation autour du point C le point B_i se déplace sur une sphère S_{C_i} de centre C et de rayon la distance $\|CB_i\|$. Le point B_i doit aussi se trouver à l'intérieur d'un volume délimité par deux sphères S_{e_i}, S_{i_i} centrées en A_i , centre des points d'articulation de la base, de rayons ρ_{min}, ρ_{max} (figure 2.2).

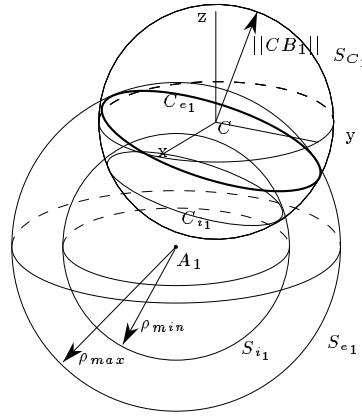


Figure 2.2 : Pour toute rotation autour de C le point B_1 doit être sur la sphère S_{C_1} centrée en C de rayon $\|CB_1\|$ et il doit être dans la zone comprise entre les sphères S_{e_1}, S_{i_1} centrées en A_1 de rayons ρ_{min}, ρ_{max}

En conséquence la zone Z_{B_i} permise pour le point B_i sur S_{C_i} est délimitée par les deux cercles C_{e_i}, C_{i_i} intersection de la sphère S_{C_i} avec les sphères S_{e_i}, S_{i_i} . Notons que nous avons tous les éléments pour calculer ces deux cercles. Pour une rotation fixée autour de l'axe \mathbf{X}_1 lorsque le plateau mobile tourne autour de l'axe \mathbf{X}_2 le point B_i va se trouver sur un cercle C_{B_i} (figure 2.3), lui aussi calculable à partir de la donnée de \mathbf{N} , du vecteur \mathbf{X}_1 et de l'angle θ_1 . On doit alors considérer deux cas de figures:

- le cercle C_{B_i} n'a pas d'intersection avec les cercles C_{e_i}, C_{i_i}
- le cercle C_{B_i} a au moins un point commun avec C_{e_i}, C_{i_i}

Dans le premier cas le cercle C_{B_i} est soit compris dans la zone délimitée par les cercles C_{e_i}, C_{i_i} et le point B_i peut occuper n'importe quelle position sur ce cercle, soit le cercle C_{B_i} est complètement à l'extérieur de la zone et aucune rotation du manipulateur n'est permise : la rotation d'angle θ_1 met le manipulateur hors des limites du segment i . Pour tester dans quel cas l'on se trouve il suffit de prendre un point aléatoire sur le cercle C_{B_i} (on fixe donc

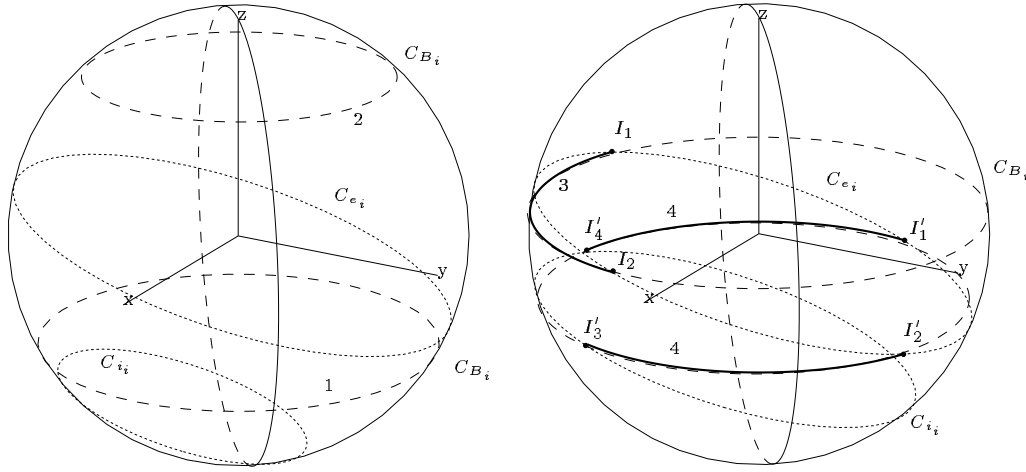


Figure 2.3 : Pour une rotation fixée autour de \mathbf{X}_1 le point B_i se déplace sur un cercle C_{B_i} (en trait pointillé) lorsque le plateau tourne autour du vecteur \mathbf{X}_2 . Si C_{B_i} est compris dans la zone délimitée par les cercles C_{e_i}, C_{i_i} (en pointillé fin) le cercle complet est permis pour B_i (1). Au contraire si C_{B_i} est complètement en dehors de la zone (2) aucune rotation n'est permise.

complètement l'orientation de la plate-forme) et de calculer la longueur du segment i dans cette position. Si la longueur est compatible avec les bornes sur le segment le cercle est complètement permis.

Considérons maintenant le cas où il existe des points d'intersection du cercle C_{B_i} avec au moins un des cercles C_{e_i}, C_{i_i} . Notons d'ailleurs qu'il y aura un maximum de 4 points d'intersection et, sauf cas particulier, toujours un nombre pair de points d'intersection. On aura donc soit deux points d'intersection I_1, I_2 (C_{B_i} coupe seulement un des cercles, cas 3 sur la figure 2.3) ou quatre points d'intersection $I'_{1..4}$ (cas 4 sur la figure 2.3). Ces points d'intersection délimitent des arcs de cercle sur C_{B_i} . Sur ces arcs soit la longueur du segment est toujours comprise dans les bornes permises, soit elle ne l'est jamais. On considère alors successivement chacun des arcs de cercle et l'on détermine s'il définit une zone permise pour B_i en testant si pour l'un de ses points (on prend en général le milieu de l'arc) la longueur du segment est compatible. Après avoir testé chacun des arcs on obtient l'ensemble des zones permises pour B_i sur C_{B_i} .

2.3 Calcul des zones permises pour N

2.3.1 Zones permises par segment

A partir de la connaissance du vecteur \mathbf{X}_1 et de l'angle de rotation θ_1 il est facile de déterminer le cercle C^N sur la sphère unité sur lequel se déplace N_e . Supposons que nous ayons déterminé les arcs de cercle permis pour un point B_i et considérons que le point B_i se déplace sur un de ces arcs permis A_j^i . Comme le segment \mathbf{N} est attaché au plateau mobile l'extrémité N_e se déplace lui aussi sur un arc de cercle \mathcal{A}_j^i , partie de C^N et sur cet arc les contraintes sur le

segment i sont satisfaites.

Il nous faut donc déterminer les extrémités de cet arc à partir des extrémités de l'arc A_j^i . Pour cela supposons que le point B_i occupe une des extrémités de l'arc A_j^i . Pour cette position de B_i l'orientation du plateau est complètement définie et l'on note R_e la matrice de rotation correspondante. On a :

$$\mathbf{N} = \mathbf{C}\mathbf{N}_e = \mathbf{C}\mathbf{B}_i + \mathbf{B}_i\mathbf{N}_e \quad (2.1)$$

Soit $\mathbf{C}\mathbf{N}_e^{\mathbf{r}}$ les coordonnées relatives de N_e et soit $\mathbf{C}\mathbf{B}_i^{\mathbf{r}}$ les coordonnées relatives de B_i . On peut écrire :

$$\mathbf{B}_i\mathbf{N}_e = R_e\mathbf{C}\mathbf{N}_e^{\mathbf{r}} - R_e\mathbf{C}\mathbf{B}_i^{\mathbf{r}} \quad (2.2)$$

En combinant les équations (2.1) et (2.2) on obtient:

$$\mathbf{N} = \mathbf{C}\mathbf{B}_i + R_e(\mathbf{C}\mathbf{N}_e^{\mathbf{r}} - \mathbf{C}\mathbf{B}_i^{\mathbf{r}}) \quad (2.3)$$

L'équation 2.3 permet alors de calculer l'extrémité de l'arc \mathcal{A}_j^i correspondant à celle de l'arc A_j^i . On construit ainsi les zones de N_e pour lesquelles les contraintes de longueur sur le segment i sont satisfaites.

2.3.2 Zones permises pour l'ensemble des segments

Pour un angle de rotation θ_1 fixé le point N_e décrit le cercle C^N et nous avons déterminé dans la section précédente les arcs sur ce cercle pour lesquelles les contraintes sur un segment sont satisfaites. En faisant ce calcul pour chacun des segments et en calculant l'intersection des arcs calculés on obtient alors les arcs de C^N où l'ensemble des contraintes sur les segments sont satisfaites.

Ce calcul a été établi pour une valeur fixée de la rotation θ_1 mais en calculant ces différentes zones pour un certain nombre de valeurs de l'angle θ_1 dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ on obtiendra une bonne approximation de la zone permise pour les deux rotations considérées.

Notons cependant que l'on devra couper l'intervalle de variation de θ_1 en deux parties. En effet il existe deux angles θ_1 pour lesquelles le point N_e décrit le même cercle. Ainsi si le segment \mathbf{N} est selon la normale au plateau mobile et que le vecteur \mathbf{X}_1 est selon l'axe x , des rotations d'angle θ_1 et $-\theta_1$ conduiront au même cercle d'évolution pour N_e . Un exemple de calcul est présenté en figure 2.4 pour le manipulateur décrit en annexe.

2.4 Contrainte sur les articulations

On peut considérer que les limites mécaniques d'une articulation de type cardan ou rotule peuvent être définies par une surface délimitant un volume à l'intérieur duquel doit se trouver le segment du manipulateur. Comme nous l'avons déjà fait [18] on suppose que l'on peut modéliser cette surface pour les articulations de la base par une pyramide à faces planes dont le centre est le point A_i (figure 2.5).

Pour ce qui concerne les contraintes sur les articulations du mobile on peut clairement adopter le même modèle que celui utilisé pour les articulations de la base. On peut ainsi définir une pyramide P_i de sommet B_i telle que si les contraintes sur l'articulation sont satisfaites le point A_i se trouve à l'intérieur de la pyramide (figure 2.6). On peut alors définir une pyramide équivalente à P_i , P_i' , de sommet A_i tel que si A_i est à l'intérieur de P_i alors B_i est à l'intérieur de P_i' (figure 2.7). Il faut noter que le modèle pyramide ne permet pas de décrire un certain nombre d'articulations rotule comme par exemple celle constituée d'un joint de Cardan dont la base est montée sur une articulation rotoïde.

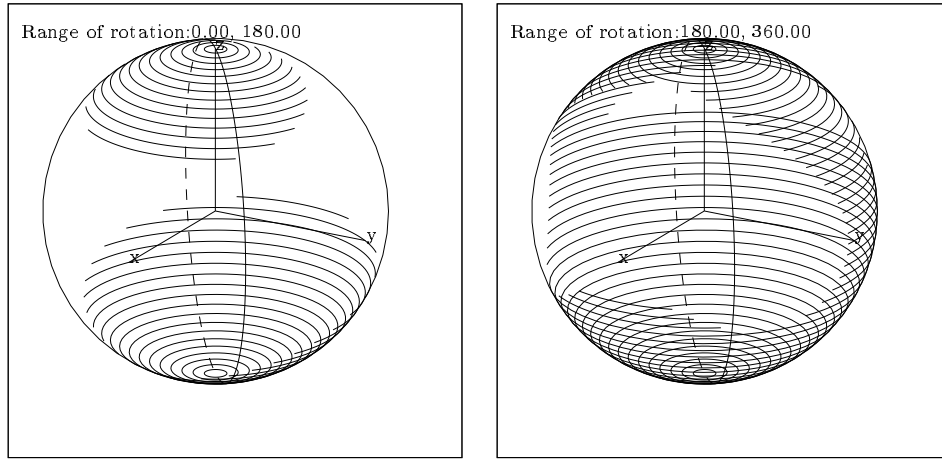


Figure 2.4 : Sur la sphère unité en trait fin les zones permises pour la normale au plateau mobile pour les rotations autour de l'axe x dans l'intervalle $[0-2\pi]$ suivie de rotation autour de l'axe z . Les contraintes portent sur les longueurs des segments.

Lorsque le point B_i décrit un cercle C_{B_i} , on considère l'intersection de ce cercle avec les faces de la pyramide définissant les contraintes sur les articulations en A_i . Ces points d'intersections délimitent des arcs de cercle sur C_{B_i} sur lesquelles le segment $A_i B_i$ est soit tout entier à l'intérieur de la pyramide (donc les contraintes sur l'articulation en A_i sont satisfaites) soit le segment est à l'extérieur de la pyramide. Pour chacun des arcs on considère un point quelconque de l'arc (usuellement son milieu) et nous testons pour ce point si le segment $A_i B_i$ est à l'intérieur de la pyramide. On retient alors les arcs pour lesquelles le test est vrai (figure 2.8). On pourrait évidemment faire de même en considérant les pyramides équivalentes.

A partir des arcs permis pour B_i on déduit de la même manière que dans la section précédente les arcs permis $\mathcal{A}_{A_i B_i}^j$ pour N_e sur C^N du point de vue des contraintes sur les articulations. Sur le cercle C^N on a donc défini les arcs \mathcal{A}_i^j pour lesquelles les contraintes sur les segments sont satisfaites, ainsi que les arcs $\mathcal{A}_{A_i B_i}^j$ pour lesquels les contraintes sur l'articulation en A_i sont satisfaites. L'intersection de chacun des arcs \mathcal{A}_i^j avec la famille des arcs $\mathcal{A}_{A_i B_i}^j$ fournit alors les arcs pour lesquels l'ensemble des contraintes sont vérifiées, donc les positions permises pour N_e . La figure 2.9 donne un exemple d'un tel calcul.

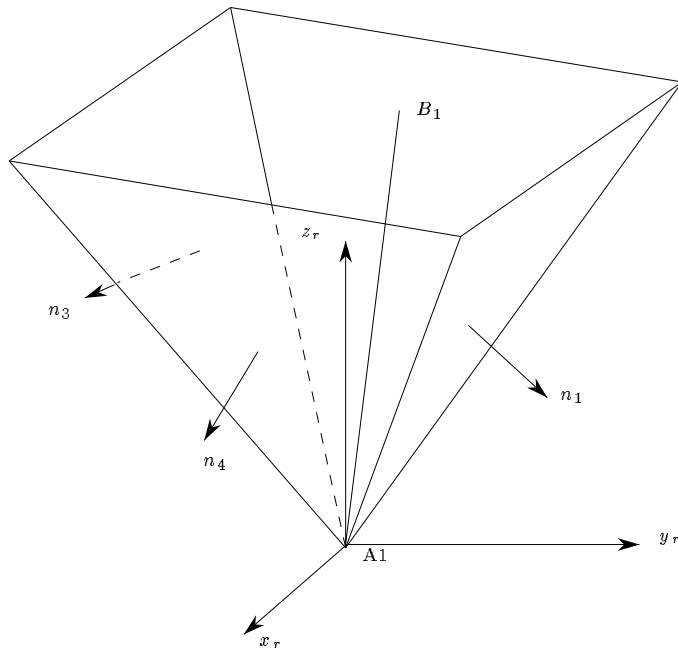


Figure 2.5 : Exemple de modélisation de contrainte sur une articulation. Si la contrainte est satisfaite le segment A_1B_1 est à l'intérieur d'un volume délimité par une pyramide, ici une pyramide à 4 facettes. Chaque facette i est complètement définie par le vecteur normal à la facette \mathbf{n}_i , lui même défini dans un repère $A_1, \mathbf{x}_r, \mathbf{y}_r, \mathbf{z}_r$. Pour définir complètement la pyramide il suffit alors de définir l'orientation du repère de la pyramide par rapport au référentiel absolu par 3 angles d'Euler ainsi que les normales aux facettes dans le repère de la pyramide.

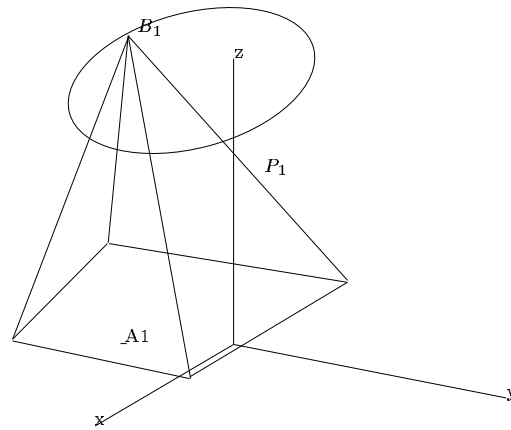


Figure 2.6 : Définition de la pyramide caractérisant les contraintes sur l'articulation du plateau mobile. Le point A_1 se trouve à l'intérieur de la pyramide si les contraintes sont satisfaites.

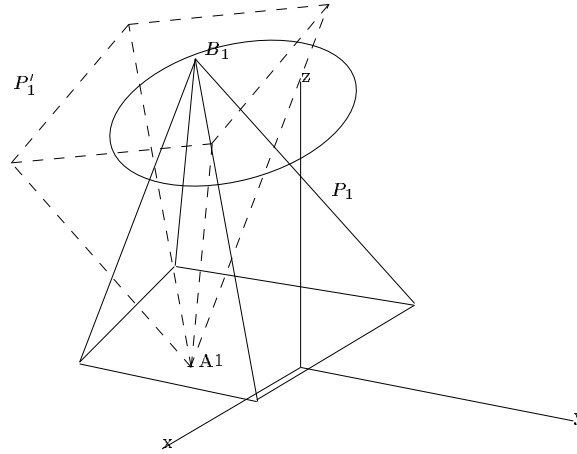


Figure 2.7 : Définition de la pyramide équivalente caractérisant les contraintes sur l'articulation du plateau mobile. A partir de P_1 on peut construire P_1' tel que si les contraintes sur l'articulation du plateau mobile sont satisfaites alors le point B_1 se trouve à l'intérieur de P_1' .

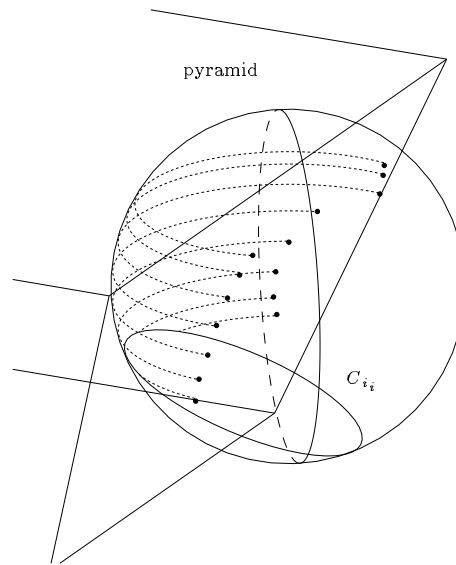
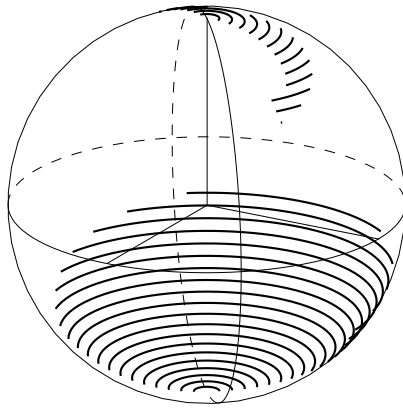


Figure 2.8 : Les points intersection des cercles C_{B_i} avec la pyramide (points marqués) permettent de calculer les zones permises pour B_i sur C_{B_i} du point de vue des contraintes sur l'articulation (les zones permises sont en trait pointillé)

Range of rotation:0.00, 180.00



Range of rotation:180.00, 360.00

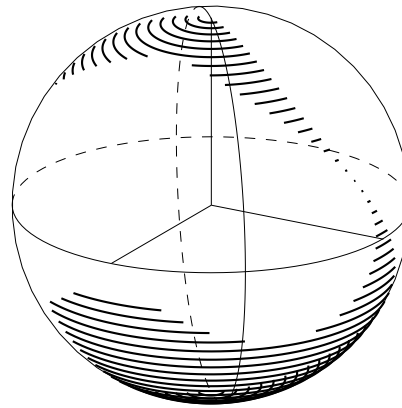


Figure 2.9 : Pour le manipulateur décrit en annexe on a déterminé les zones permises pour la normale au plateau mobile pour les rotations autour de l'axe x dans l'intervalle $[0-2\pi]$ suivie de rotation autour de l'axe z lorsque l'on prend en compte les contraintes sur les longueurs des segments et les contraintes sur les articulations de la base.

2.5 Prise en compte des intersections entre segments

Il apparaît clairement que dans les mouvements de rotation une contrainte forte est le risque d'intersection entre les segments. On suppose que les segments sont des cylindres de rayon r_i et que deux segments i, j sont en collision si la distance entre ces deux segments est plus faible que $r_i + r_j$. Rappelons que la distance entre deux segments A_1B_1, A_2B_2 est définie comme le minimum de la distance entre tout couple de points sur les segments et qu'elle s'obtient de la manière suivante [18]:

- si les points de la perpendiculaire commune aux droites associées aux segments appartiennent aux segments la distance est la distance entre les droites.
- sinon soient les projections $P_{A_1}^2, P_{B_1}^2$ des points A_1, B_1 sur la droite 2 et les projections $P_{A_2}^1, P_{B_2}^1$ des points A_2, B_2 sur la droite 1. On considère seulement les points dont la projection est sur le segment associé à la droite. Si l'ensemble de ces points est non vide la distance d est alors le minimum des distances de ces points au droite, sinon la distance d est définie comme le minimum des distances entre les couples de points $(A_1, B_2), (B_1, A_2), (A_1, A_2), (B_1, B_2)$.

Notons que nous ferons l'hypothèse que la distance entre les points $(A_1, A_2), (B_1, B_2)$ est toujours supérieure à la somme des rayons des deux segments (dans le cas contraire les segments sont toujours en intersection). Ces considérations sont illustrées sur les figures 2.10, 2.11. On



Figure 2.10 : Illustration du minimum de distance lorsque les projections de deux points (ici B_1 et A_2), un de chaque segment, appartiennent aux segments opposés. La distance entre les segments est alors le minimum de $\|B_1P_{B_1}^2\|, \|A_2P_{A_2}^1\|$.

note d_{ij} la distance entre les deux lignes associées aux segments i, j , $d(A, B)$ la distance entre deux points A, B , $P_{M_i}^j$ la projection du point M appartenant au segment i sur le segment j et P_i, P_j les points de la perpendiculaire commune aux droites associées aux segments i, j respectivement sur les droites i et j . Pour un angle de rotation θ_1 fixé on va donc chercher les lieux où la distance entre deux segments i, j est égale à $r_i + r_j$. On cherche donc les angles de rotation θ_2 tel qu'au moins une des relations suivantes soit vérifiée :

$$\begin{aligned}
 d_{ij} = d(P_i, P_j) &= r_i + r_j & d(A_i, A_j) &= r_i + r_j \\
 d(A_i, P_{A_i}^j) &= r_i + r_j & d(A_i, B_j) &= r_i + r_j \\
 d(B_i, B_j) &= r_i + r_j & d(B_i, A_j) &= r_i + r_j \\
 d(A_j, P_{A_j}^i) &= r_i + r_j & d(B_i, P_{B_i}^j) &= r_i + r_j \\
 d(B_j, P_{B_j}^i) &= r_i + r_j & &
 \end{aligned}$$

en ne gardant bien sûr pour chacune de ces relations que les valeurs pour lesquelles la relation définit bien la distance entre segments, c'est-à-dire pour lesquelles les relations suivantes sont vérifiées:

$$P_i \in A_iB_i \quad P_j \in A_jB_j \quad P_{A_i}^j \in A_jB_j$$

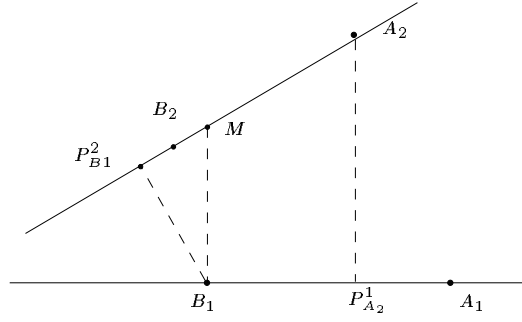


Figure 2.11 : Illustration de la distance minimum lorsque la projection d'un point d'un segment (ici A_2) appartient au segment opposé. Ici la distance est le minimum de $\|A_2P^1_{A_2}\|$, $\|B_1B_2\|$, $\|A_1A_2\|$, $\|B_1A_2\|$, $\|B_2A_1\|$.

$$P_{A_j}^i \in A_i B_i \quad P_{B_i}^j \in A_j B_j \quad P_{B_j}^i \in A_i B_i$$

Toutes ces relations ont la même forme quand elles sont exprimées en fonction de θ_2 et s'écrivent :

$$a_1 \sin(\theta_2) + a_2 \cos(\theta_2) + a_3 = 0 \quad (2.4)$$

où les coefficients a_i ne dépendent que de la relation traitée et de la géométrie du manipulateur. Ce type d'équation peut fournir deux solutions en θ_2 c'est-à-dire deux positions sur le cercle C_{B_i} où la distance entre deux segments vaut d .

Pour l'analyse de la position possible des points B_i du point de vue des collisions du segments i avec les autres segments nous allons déterminer l'ensemble des points où le segment i est en collision avec le segment j , $j \neq i$. Pour cela nous utilisons les équations du type (2.4) pour déterminer sur le cercle C_{B_i} l'ensemble des positions de B_i où la distance entre le segment i et un autre segment est juste d . Sur chacun des cercles C_{B_i} on obtient ainsi un ensemble de position de B_i où le segment i est en collision avec un autre segment (figure 2.12).

Pour déterminer les zones permises pour le point B_i nous considérons les arcs délimités par l'ensemble des points critiques sur C_{B_i} à savoir les intersections de C_{B_i} avec les cercles C_{e_i}, C_{i_i} , les intersections de C_{B_i} avec les pyramides qui définissent les contraintes sur les articulations et, enfin, les points du cercles où la distance entre les segments correspond à une collision.

L'ensemble de ces points définissent des arcs de cercles et la zone permise pour B_i correspond aux arc de cercle pour lesquelles le point milieu satisfait l'ensemble des contraintes.

A partir des arcs valides pour B_i on construit de la même manière que dans les sections précédentes les arcs valides pour N_e du point de vue du segment i et l'intersection des arcs ainsi obtenu pour l'ensemble des segments défini les positions permises pour N_e .

Les figures 2.13, 2.14 montrent ainsi les possibilités de rotation de l'axe y lié au plateau mobile lors de rotation autour de l'axe x suivie de rotation autour de de l'axe z : on illustre ainsi les possibilités de rotation du plateau autour de la verticale, ce qui conduit à des intersections entre segments. On remarque sur ces figures que tous les cercles sont d'ailleurs découpés en tronçons alors que si l'on ne prend pas en compte les intersections entre segments certaines zones admissibles sont des cercles complets. En somme pour le manipulateur étudié les longueurs admissibles des segments permettraient une rotation complète du manipulateur si l'on ne prenait pas en compte les intersections entre segment.

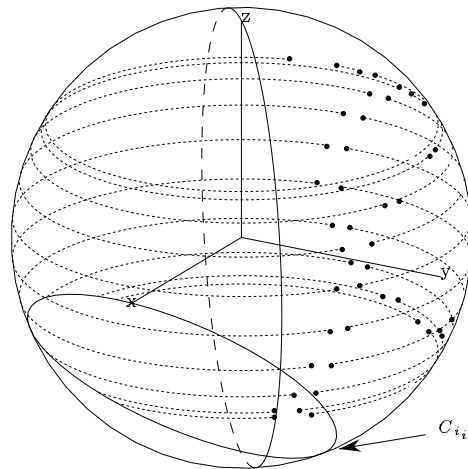


Figure 2.12 : En certains points des cercles C_{B_i} la distance entre le segment i et un autre segment j est égal à $r_i + r_j$ (points marqués)

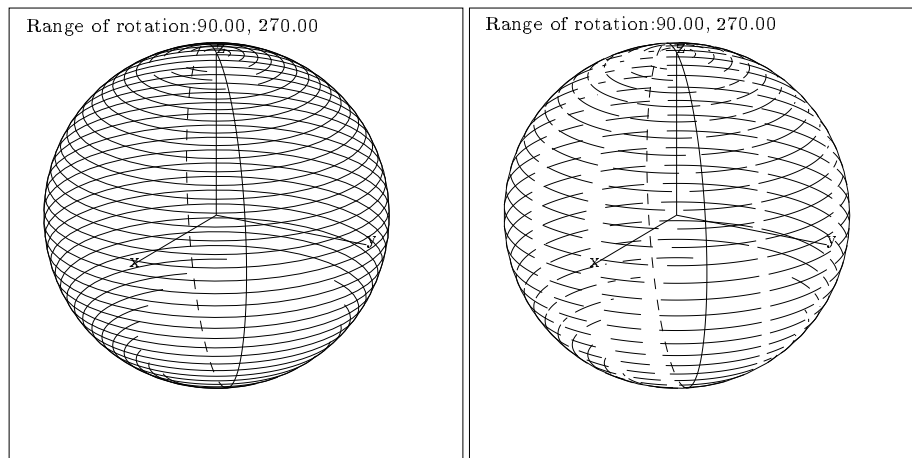


Figure 2.13 : Les zones permises pour l'axe $-y_r$ du plateau mobile pour les rotations autour de l'axe x dans l'intervalle $[\pi/2-3\pi/2]$ suivie de rotation autour de l'axe z . A gauche on n'a pris en compte que les contraintes sur les longueurs de segment et à droite on a pris en compte en plus les intersections entre segment.

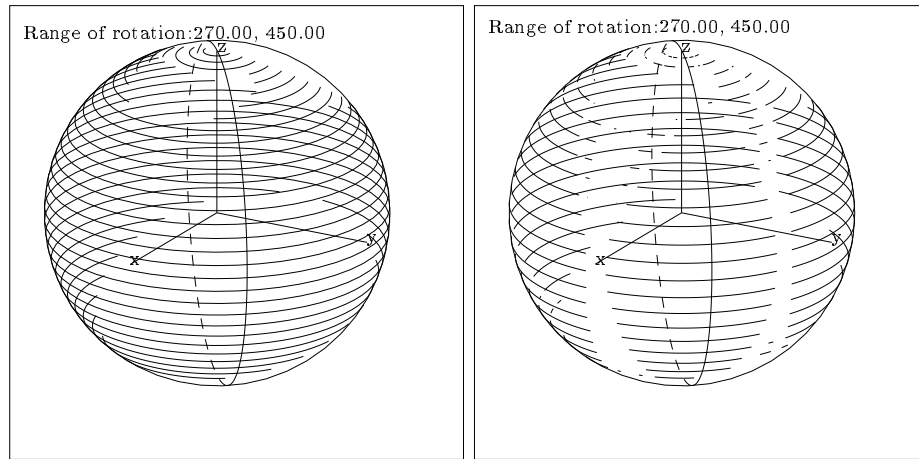


Figure 2.14 : Les zones permises pour l'axe $-y$ du plateau mobile pour les rotations autour de l'axe x dans l'intervalle $[3\pi/2-\pi/2]$ suivie de rotation autour de l'axe z . A gauche on n'a pris en compte que les contraintes sur les longueurs de segment et à droite on a pris en compte en plus les intersections entre segments.

2.6 Conclusion

L'algorithme présenté dans les sections précédentes permet de représenter deux degrés de liberté en rotation du plateau mobile en déterminant les positions possibles de l'extrémité d'un segment de longueur unité lié au plateau mobile et dont une extrémité est fixée au centre de rotation. Cet algorithme permet la prise en compte de l'ensemble des contraintes sur le manipulateur.

Chapitre 3

Exemples

Notre intérêt pour le calcul de l'espace de travail des robots parallèles a été suscité lors d'un séjour au Mechanical Engineering Laboratory de Tsukuba à l'invitation du Dr. Arai. On va donc présenter des résultats pour un manipulateur construit dans ce laboratoire.

Dans ce prototype les articulations de base se trouvent en dessous de la base, les segments émergeant d'un orifice carré (figure 3.1). On peut donc modéliser les contraintes sur les articulations de la base par des pyramides à 4 faces orientées vers le centre de la base. Nous présentons ici des vues de l'espace de travail avec prise en compte seulement des limitations articulaires, puis, pour les mêmes orientations, avec prise en compte des contraintes sur les articulations de base et enfin en prenant aussi en compte les intersections entre segments. On pourra constater que les contraintes sur les articulations et la prise en compte des intersections entre segments influent sensiblement l'espace de travail.

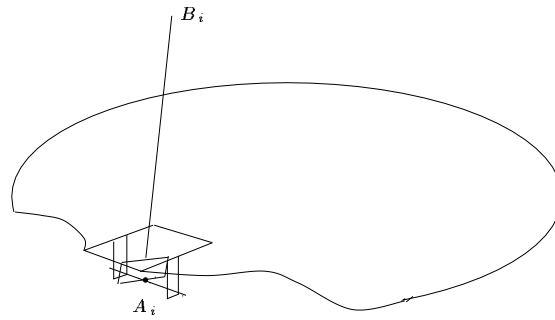


Figure 3.1 : Les articulations de base du prototype. Les centres A_i des articulations se trouvent en dessous du plateau de base et les segments sont contraints par l'orifice carré C .

On peut remarquer aussi que les articulations présentent une disposition croisée qui, si elle favorise l'espace de travail en orientation, implique un plus grand risque d'intersection entre segments. Nous verrons en effet que c'est bien le cas et que pour une distance de sécurité de 8 mm l'espace de travail se trouve réduit par les collisions entre segments.

La position des points d'articulation (en mm) est donnée dans les tableaux suivants. Tous les angles sont donnés en degré. Les figures représentent l'espace de travail en orientation

	1	2	3	4	5	6
x_a	112.5	-225	-112.5	67.5	-135	67.5
y_a	-194.856	0	194.856	-116.913	0	116.913
z_a	-25	-25	-25	-25	-25	-25
x_b	95.263	0	-95.263	-69.282	0	69.282
y_b	55	-110	55	-40	80	-40
z_b	-20	-20	-20	-20	-20	-20

Tableau 3.1 : Position des points d'articulation de la base et du mobile pour un prototype (en mm).

757	757	757	733	733	733
528	528	528	491	491	491

Tableau 3.2 : Longueur minima et maxima des segments du prototype (en mm).

pour la normale du plateau mobile et pour des rotations autour de l'axe x suivies de rotations autour de l'axe z . Dans les figures 3.2 à 3.4 les contraintes sont les longueurs des segments, dans les figures 3.5 à 3.7 on rajoute les contraintes sur les articulations de la base et dans les figures 3.8 à 3.10 on impose la non intersection des segments dont les rayons sont de 8mm. Les zones permises sur la sphère unité sont dessinées en grisé.

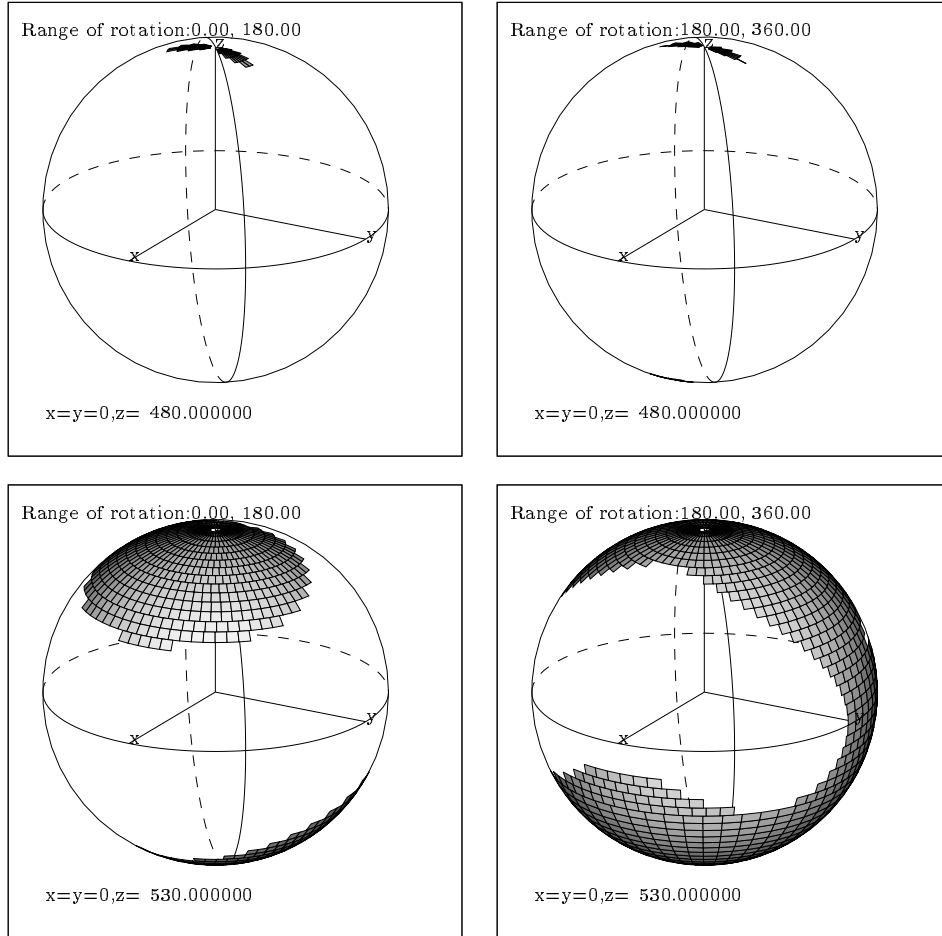


Figure 3.2 : Espace de travail en orientation. Representation des zones permises pour la normale du plateau mobile pour des rotations autour de l'axe x suivie de rotation autour de l'axe z . Les contraintes sont les longueurs des segments.

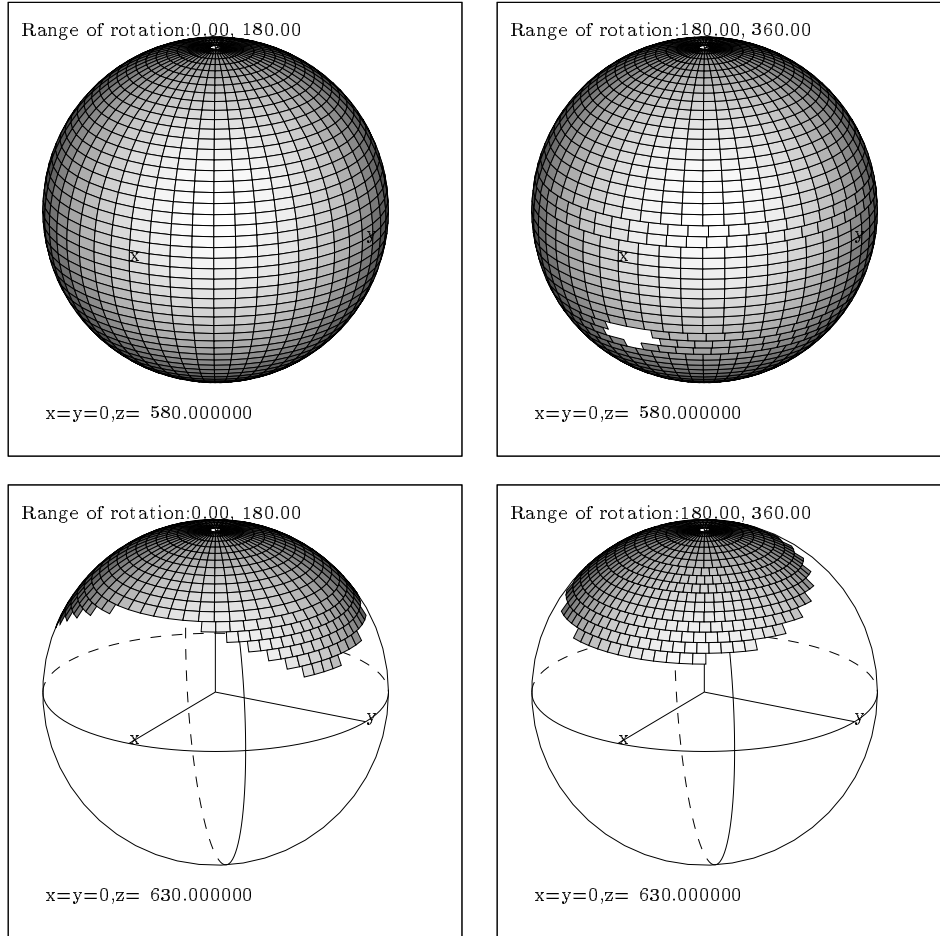


Figure 3.3 : Espace de travail en orientation. Representation des zones permises pour la normale du plateau mobile pour des rotations autour de l'axe x suivie de rotation autour de l'axe z . Les contraintes sont les longueurs des segments.

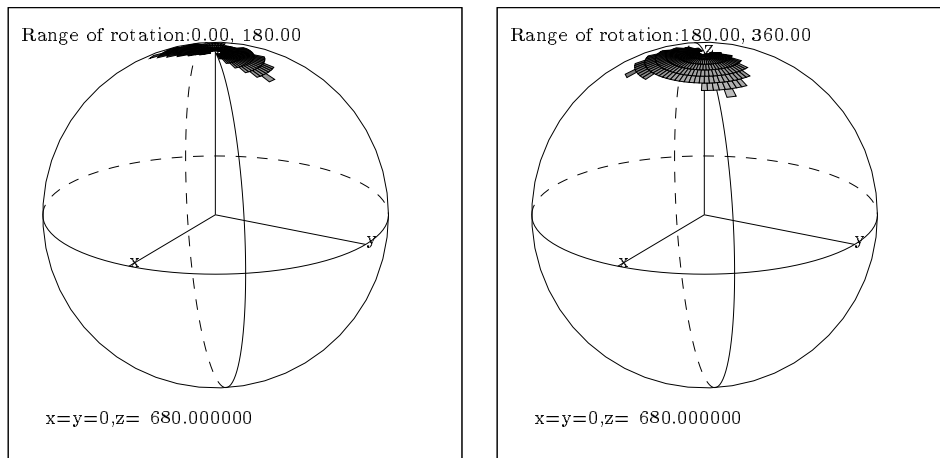


Figure 3.4 : Espace de travail en orientation. Représentation des zones permises pour la normale du plateau mobile pour des rotations autour de l'axe x suivie de rotation autour de l'axe z . Les contraintes sont les longueurs des segments.

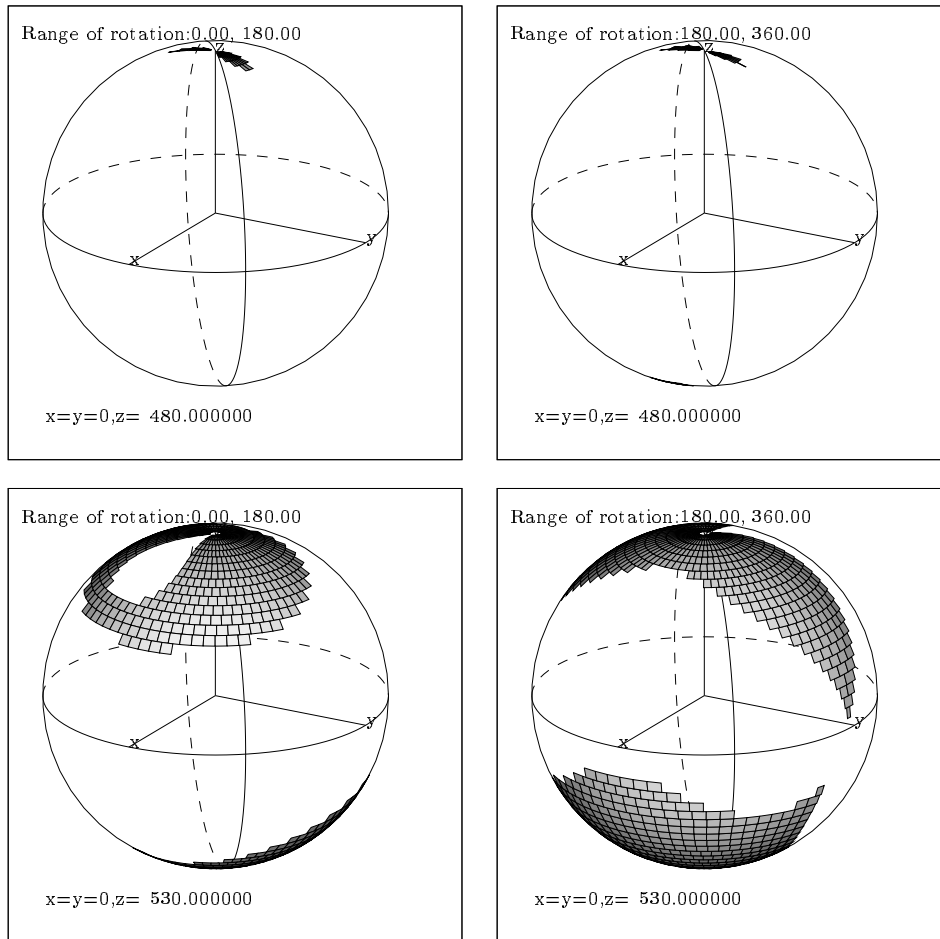


Figure 3.5 : Espace de travail en orientation. Representation des zones permises pour la normale du plateau mobile pour des rotations autour de l'axe x suivie de rotation autour de l'axe z . Les contraintes sont les longueurs des segments et les contraintes sur les articulations de la base.

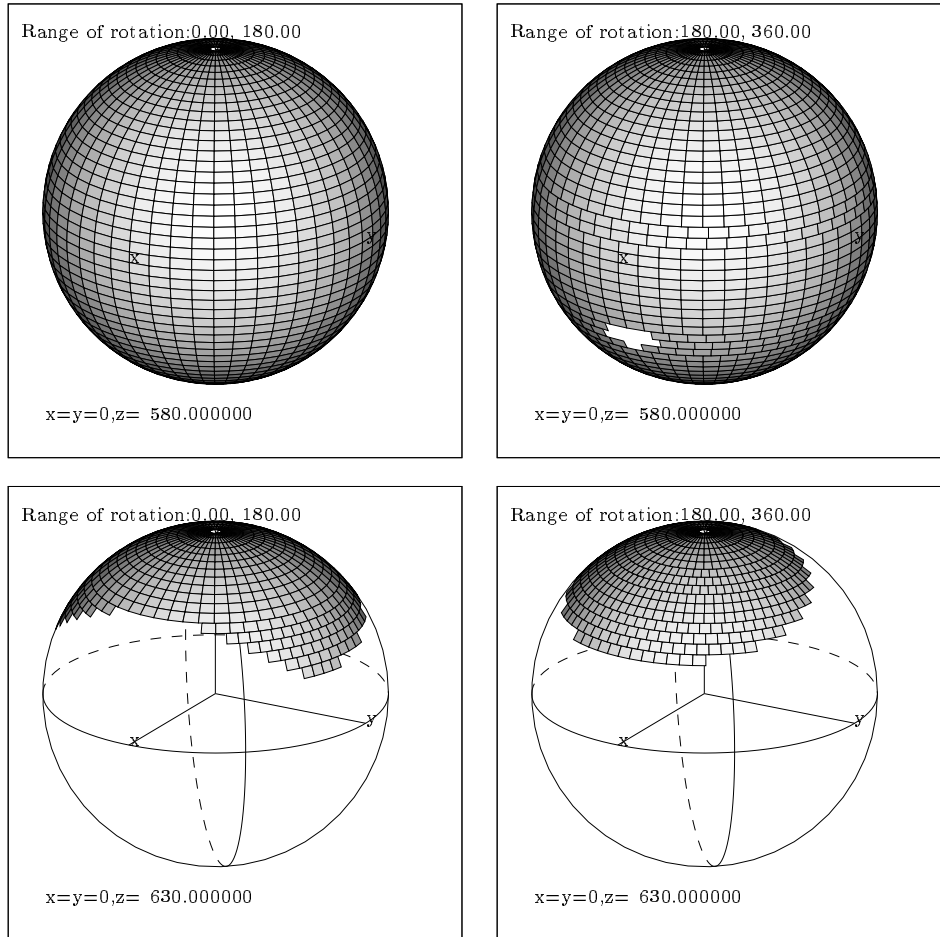


Figure 3.6 : Espace de travail en orientation. Representation des zones permises pour la normale du plateau mobile pour des rotations autour de l'axe x suivie de rotation autour de l'axe z . Les contraintes sont les longueurs des segments et les contraintes sur les articulations de la base.

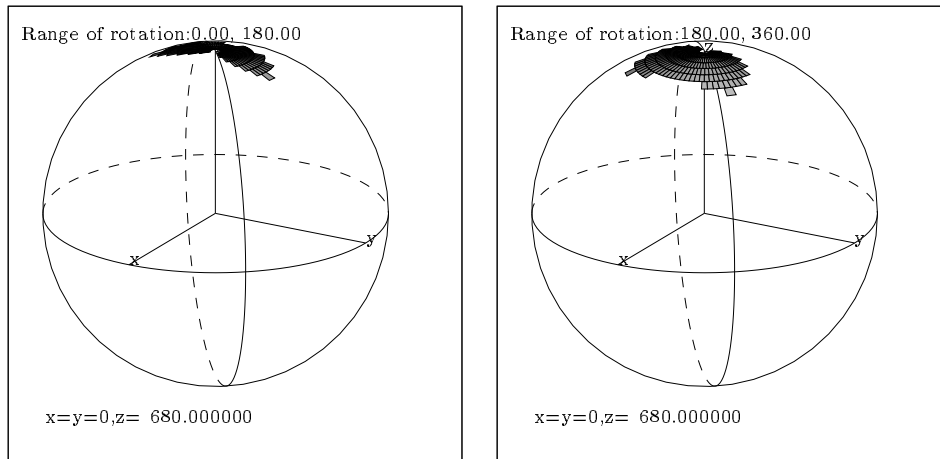


Figure 3.7 : Espace de travail en orientation. Representation des zones permises pour la normale du plateau mobile pour des rotations autour de l'axe x suivie de rotation autour de l'axe z . Les contraintes sont les longueurs des segments et les contraintes sur les articulations de la base.

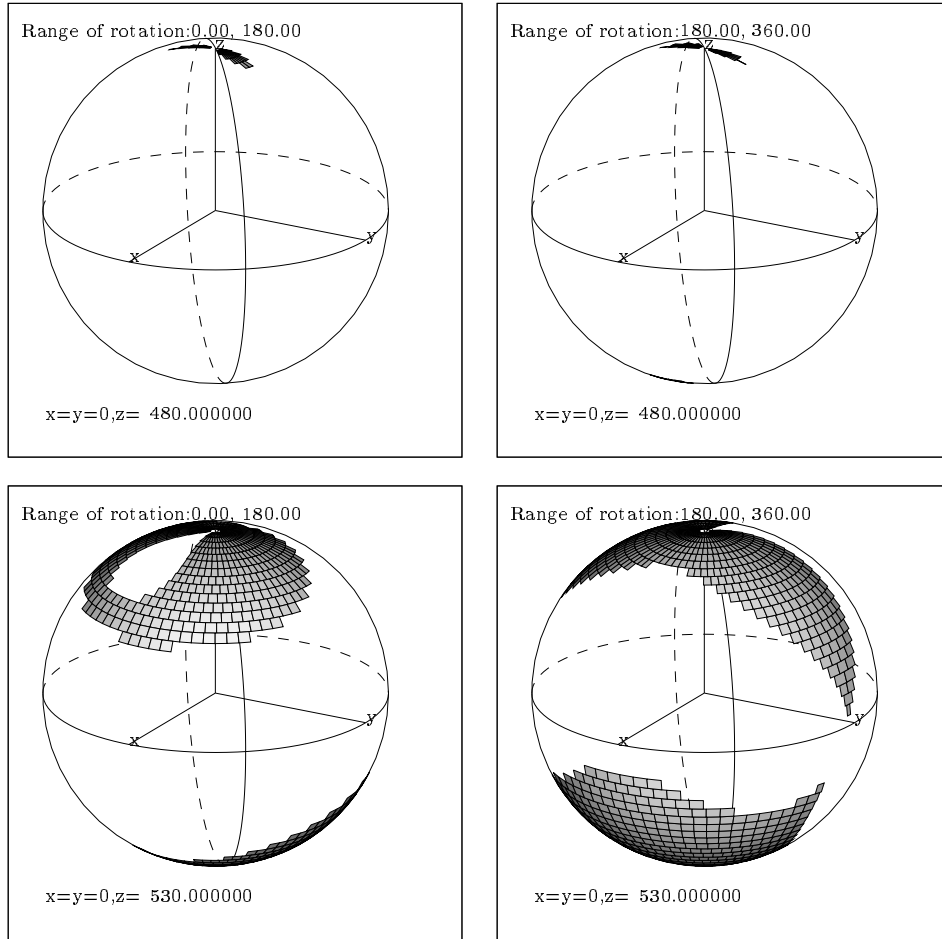


Figure 3.8 : Espace de travail en orientation. Representation des zones permises pour la normale du plateau mobile pour des rotations autour de l'axe x suivie de rotation autour de l'axe z . Les contraintes sont les longueurs des segments, les contraintes sur les articulations de la base et la non intersection des segments.

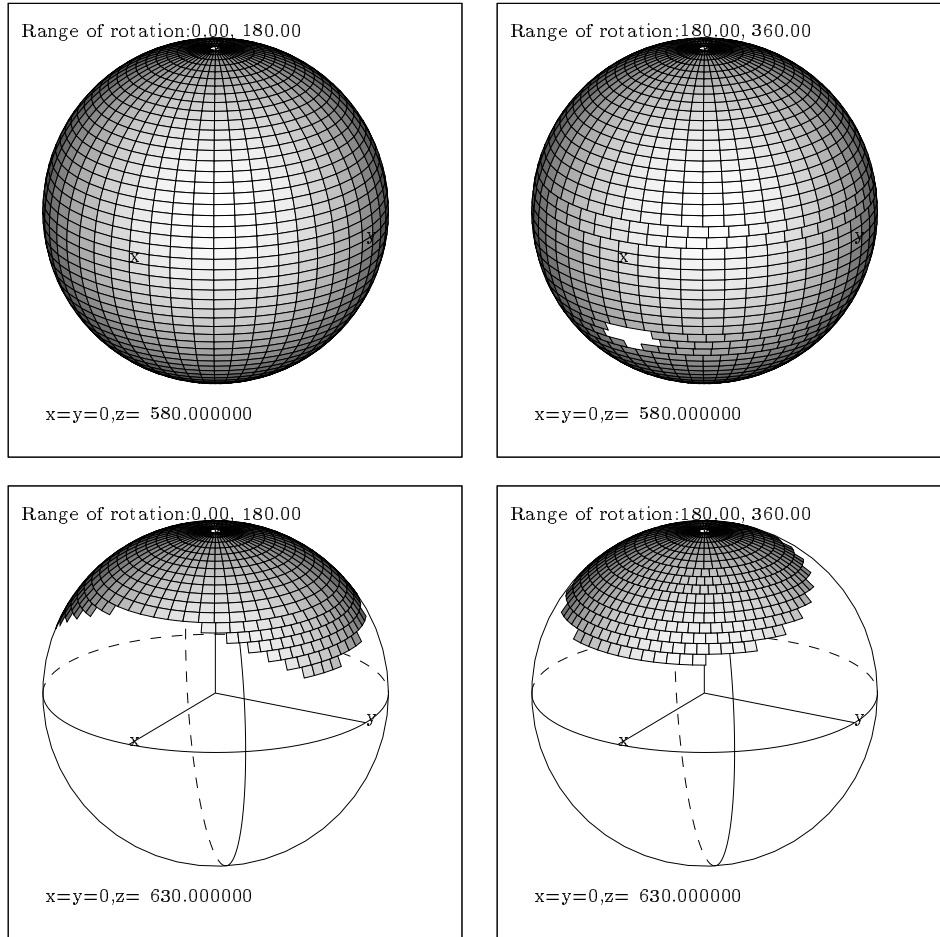


Figure 3.9 : Espace de travail en orientation. Représentation des zones permises pour la normale du plateau mobile pour des rotations autour de l'axe x suivie de rotation autour de l'axe z . Les contraintes sont les longueurs des segments, les contraintes sur les articulations de la base et la non intersection des segments.

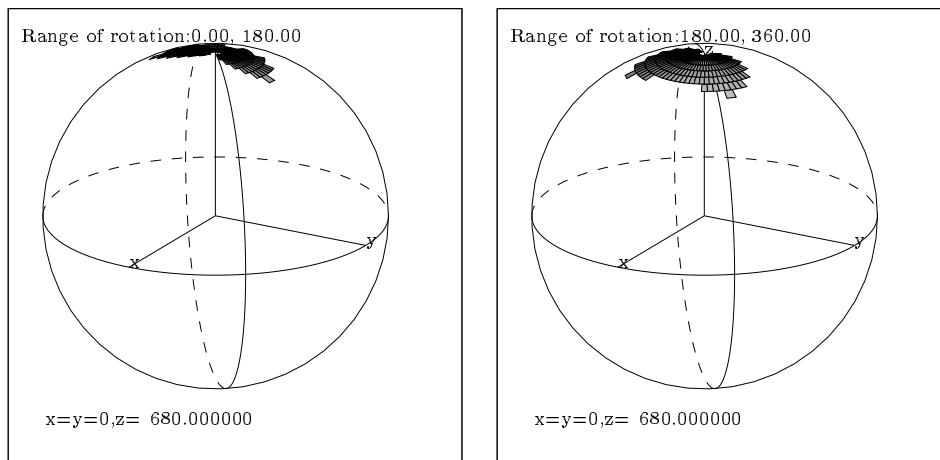


Figure 3.10 : Espace de travail en orientation. Représentation des zones permises pour la normale du plateau mobile pour des rotations autour de l'axe x suivie de rotation autour de l'axe z . Les contraintes sont les longueurs des segments, les contraintes sur les articulations de la base et la non intersection des segments.

Chapitre 4

Espace dextre

L'espace dextre d'un robot parallèle est l'ensemble des positions de C pour lesquelles toutes les orientations du plateau mobile sont permises.

Soit un point de l'espace dextre C_1 : les points B_i peuvent donc se trouver en n'importe quelle position sur la sphère de centre C_1 et de rayon $\|CB_i\|$. Les positions admissibles de C du point de vue des contraintes sur le segment i , si elles existent, sont donc dans la couronne sphérique CS_i dont la frontière extérieure est la sphère de centre A_i et de rayon $\rho_{i_{max}} - \|CB_i\|$ et la frontière intérieure la sphère de centre A_i et de rayon $\rho_{i_{min}} + \|CB_i\|$ (figure 4.1). L'espace

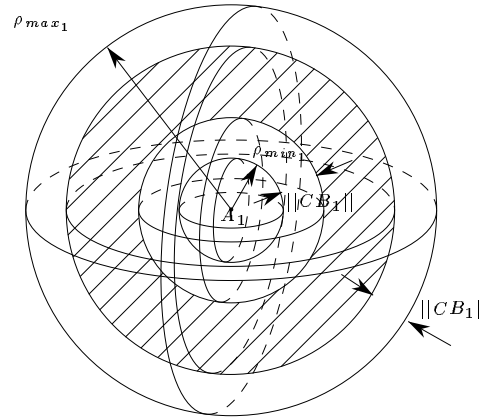


Figure 4.1 : La zone dextre permise pour C en ne prenant en compte que les contraintes sur le segment i .

dextre est alors l'intersection, si elle existe, des 6 zones CS_i .

On peut clairement considérer dans cet algorithme les contraintes sur les articulations, les zones à intersecter étant alors les intersections des couronnes sphériques avec les pyramides (figure 4.2).

Par contre la prise en compte des intersections entre segment est ici plus délicate.

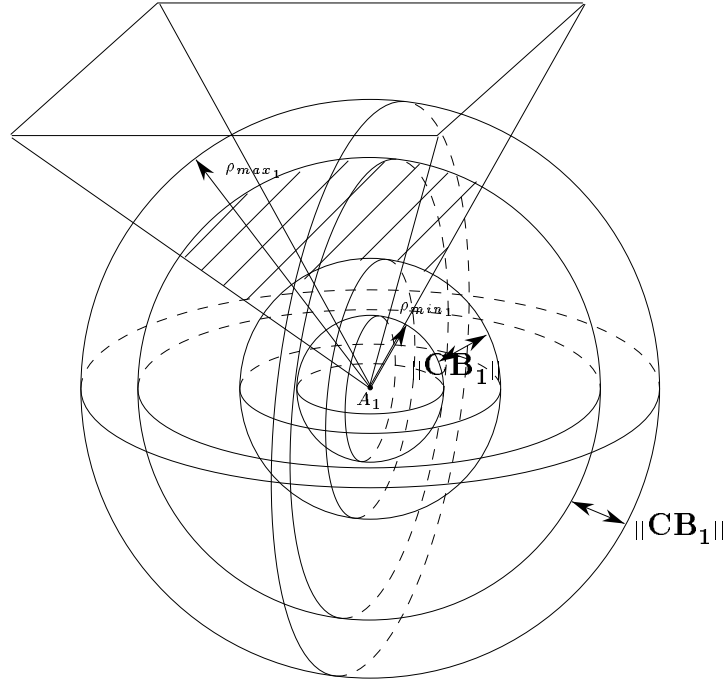


Figure 4.2 : La zone dextre permise pour C en ne prenant en compte que les contraintes sur le segment i et les contraintes sur l'articulation en A_i .

Références

- [1] Agrawal S.K. Workspace boundaries of in-parallel manipulator systems. In *ICAR*, pages 1147–1152, Pise, 19-22 Juin 1991.
- [2] Arai T., Cleary K., et others . Design, analysis and construction of a prototype parallel link manipulator. In *IEEE Int. Workshop on Intelligent Robots and Systems*, 3-6 Juillet 1990.
- [3] Baret M. Six degrees of freedom large motion system for flight simulators, piloted aircraft environment simulation techniques. In *AGARD Conference Proceeding n°249, Piloted aircraft environment simulation techniques*, pages 22–1/22–7, Bruxelles, 24-27 Avril 1978.
- [4] Bricard R. Mémoire sur la théorie de l’octaèdre articulé. *Journal de Mathématiques pures et appliquées, Liouville*, tome 3, Avril 1897.
- [5] Cleary K. et Arai T. A prototype parallel manipulator: kinematics construction, software, workspace results and singularity analysis. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 566–571, Sacramento, 11-14 Avril 1991.
- [6] Fichter E.F. A Stewart platform based manipulator: general theory and practical construction. *The Int. J. of Robotics Research*, 5(2):157–181, Avril 1986.
- [7] Gosselin C. *Kinematic analysis optimization and programming of parallel robotic manipulators*. Thèse de doctorat, McGill University, Avril 1988.
- [8] Gosselin C. Determination of the workspace of 6-dof parallel manipulators. *Trans. of the ASME, J. of Mechanisms Transmissions and Automation in Design*, Avril 1989.
- [9] Hervé J-M. et Sparacino F. Structural synthesis of parallel robots generating spatial translation. In *ICAR*, pages 808–813, Pise, 19-22 Juin 1991.
- [10] Hunt K.H. Structural kinematics of in parallel actuated robot arms. *Trans. of the ASME, J. of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, 105:705–712, Mars 1983.
- [11] Inoue H., Tsusaka Y., et Fukuizumi T. Parallel manipulator. In *Proc. 3^{ème} ISRR*, pages 321–327, Gouvieux, France, 7-11 Octobre 1985.
- [12] Jo D.Y. et Haug E.J. Workspace analysis of closed loop mechanisms with unilateral constraints. In *ASME Design Automation Conf.*, pages 53–60, Montréal, Mai 1989.
- [13] Landsberger S.E. et Shanmugasundram A.P. Workspace of parallel link crane. In *IMACS/SICE Int. Symp. on Robotics, Mechatronics, and Manufacturing Systems*, pages 479–486, Kobe, 16-20 Septembre 1992.

- [14] Lee K-M et Shah D.K. Kinematic analysis of a three-degrees-of-freedom in-parallel actuated manipulator. *IEEE J. of Robotics and Automation*, 4(3):354–360, Juin 1988.
- [15] Mac Callion H. et Pham D.T. The analysis of a six degrees of freedom work station for mechanized assembly. In *Proc. 5^{ème} World Congress on Theory of Machines and Mechanisms*, Montréal, Juillet 1979.
- [16] Merlet J-P. Parallel manipulators, Part 1, theory. Rapport de Recherche 646, INRIA, Mars 1987.
- [17] Merlet J-P. *Les Robots parallèles*. Hermès, Paris, Mars 1990.
- [18] Merlet J-P. Manipulateurs parallèles, 5^{ème} partie : Détermination de l'espace de travail. Rapport de Recherche 1645, INRIA, Mars 1992.
- [19] Merlet J-P. Force-feedback control of parallel manipulators. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Philadelphia, 24-29 Avril 1988.
- [20] Pennock G.R. et Kassner D.J. The workspace of a general geometry planar three degree of freedom platform manipulator. In *ASME Design Automation Conf.*, pages 537–544, Miami, 22-25 Septembre 1991.
- [21] Pierrot F. *Robots Pleinement Parallèles Légers : Conception Modélisation et Commande*. Thèse de doctorat, Université Montpellier II, 24 Avril 1991.
- [22] Pooran F.J. *Dynamics and control of robot manipulators with closed-kinematic chain mechanism*. Thèse de doctorat, The Catholic University of America, Washington D.C., Avril 1989.
- [23] Reboulet C. Hybrid control of a 6 d.o.f. in parallel actuated micro-macro manipulator mounted on a Scara robot. In *3rd ISRAM*, volume 3, pages 293–298, Burnaby, 18-20 Juillet 1990. ASME Press Series.
- [24] Reboulet C. et Berthomieu T. Dynamic model of a six degree of freedom parallel manipulator. In *ICAR*, Pise, 19-22 Juin 1991.
- [25] Stewart D. A platform with 6 degrees of freedom. *Proc. of the Institution of mechanical engineers*, 180(Part 1, 15):371–386, Juin 1965-66.
- [26] Weng T-C., Sandor G.N., et Xu Y. On the workspace of closed-loop manipulators with ground mounted rotary-linear actuators and finite size platform. In *ASME Design and Automation Conf.*, pages 55–61, Boston, 27-30 Septembre 1987.
- [27] Weng T.C. *Kinematics of parallel manipulators with ground-mounted actuators*. Thèse de doctorat, University of Florida, Septembre 1988.
- [28] Williams II R.L. et Reinholtz C.F. Closed-form workspace determination and optimization for parallel robot mechanisms. In *ASME Proc. of the the 20th Biennial Mechanisms Conf.*, pages 341–351, Kissimmee, 25-27 Septembre 1988.
- [29] Zamanov V.B et Sotirov Z.M. Structures and kinematics of parallel topology manipulating systems. In *Proc. Int. Symp. on Design and Synthesis*, pages 453–458, Tokyo, 11-13 Juillet 1984.

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	La structure mécanique d'un robot parallèle	2
1.2	Complexité de représentation de l'espace de travail	3
1.3	Notation	4
1.4	Etat de l'art	5
2	Espace de travail en orientation	7
2.1	Introduction	7
2.2	Positions possibles pour les points B_i	9
2.3	Calcul des zones permises pour \mathbf{N}	10
2.3.1	Zones permises par segment	10
2.3.2	Zones permises pour l'ensemble des segments	11
2.4	Contrainte sur les articulations	11
2.5	Prise en compte des intersections entre segments	16
2.6	Conclusion	20
3	Exemples	21
4	Espace dextre	32